

## מתמטיקה לפיזיקאים 2

פרק 9 - אינטגרלים קווים ושימושיהם

תוכן העניינים

1. אינטגרלים קווים ושימושיהם.....1
2. נספח - הצגה פרמטרית של עקומים חשובים.....5

## אינטגרלים קווים ושימושים

\* מומלץ בחום לעיין בנספח 'הצגה פרמטרית של עקומים חשובים'.

### שאלות

#### אינטגרל קווי מסוג I

בשאלות 1-4 חשבו את האינטגרל  $\int_C f(x,y)ds$ , כאשר:

$$C: x = \cos t, y = \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi; \quad f(x,y) = 1 - x^2 \quad (1)$$

$$C: x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, 0 \leq t \leq \pi; \quad f(x,y) = x \quad (2)$$

$$C: \text{קטע של ישר המחבר את } O(0,0) \text{ עם } A(1,2); \quad f(x,y) = x + y \quad (3)$$

$$C: \text{היקפו של } \triangle OAB \text{ של } O(0,0), A(0,1), B(1,0); \quad f(x,y) = x + y^2 \quad (4)$$

בשאלות 5-6 חשבו את האינטגרל  $\int_C f(x,y,z)ds$ , כאשר:

$$C: x = \cos t, y = \sin t, z = t, 0 \leq t \leq \pi; \quad f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad (5)$$

$$C: x = t, y = \frac{1}{\sqrt{2}}t^2, z = \frac{1}{3}t^3, 0 \leq t \leq 3; \quad f(x,y,z) = x^3 + 3z \quad (6)$$

$$(7) \quad \text{חשבו את אורך העקום } x^{2/3} + y^{2/3} = 1.$$

$$(8) \quad \text{סליל עשוי תיל דק מיוצג על ידי } x = \cos t, y = \sin t, z = 2t \quad (0 \leq t \leq \pi).$$

חשבו את מסת הסליל, אם פונקציית הצפיפות היא  $\delta(x,y,z) = kz \quad (k > 0)$ .

## אינטגרל קווי מסוג II

בשאלות 9-10 חשבו :

$$C: x = \cos t, y = \sin t \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}; \int_C 2xy dx + (x^2 + y^2) dy \quad (9)$$

$$C: x = t, y = t^2 \quad 0 \leq t \leq 1; \int_C (2x + y) dx + (x^2 - y) dy \quad (10)$$

(11) חשבו  $\int_C y dx + x^2 dy$ , כאשר  $C$  המסלול מנקודה  $(0,0)$  לנקודה  $(2,4)$ ,  
ו- $C$  נתון ע"י המשוואה :

א.  $y = 2x$

ב.  $y = x^2$

(12) חשבו  $\int_{(1,1)}^{(4,2)} (x+y) dx + (y-x) dy$ , אם העקום נתון על ידי :

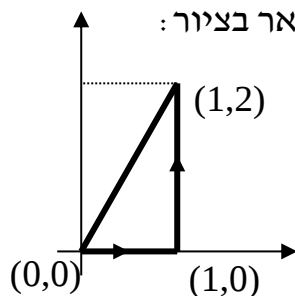
א. הפרבולה  $y^2 = x$

ב. קו ישר.

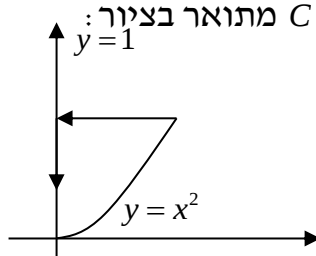
ג. הקווים הישרים מ- $(1,1)$  ל- $(1,2)$  ומשם ל- $(4,2)$ .

ד. העקום  $x = 2t^2 + t + 1, y = t^2 + 1$ .

(13) חשבו  $\int_C x^2 y dx + x dy$ , כאשר המסלול  $C$  מתואר בציור :



(14) חשבו  $\int_C (x - y^2) dx + dy$ , כאשר המסלול  $C$  מתואר בציור :



$$(15) \text{ אם } \mathbf{F}(x, y, z) = (3x^2 - 6yz)\mathbf{i} + (2y + 3xz)\mathbf{j} + (1 - 4xyz^2)\mathbf{k}$$

חשבו את האינטגרל הקווי  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ , מ- $(0,0,0)$  ל- $(1,1,1)$ , לאורך המסלולים:

$$\text{א. } x=t, y=t^2, z=t^3$$

ב. הקווים הישרים מ- $(0,0,0)$  ל- $(0,0,1)$ , משם ל- $(0,1,1)$  ומשם ל- $(1,1,1)$ .

ג. הישר המחבר את  $(0,0,0)$  ו- $(1,1,1)$ .

בשאלות 16-17 חשבו את האינטגרל הקווי  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ , כאשר:

$$(16) \mathbf{F}(x, y) = (x^2 y^3, -y\sqrt{x}), \quad \mathbf{r}(t) = (t^2, -t^3), \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$(17) \mathbf{F}(x, y, z) = (\sin x, \cos y, xz), \quad \mathbf{r}(t) = (t^3, -t^2, t), \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$(18) \text{ נתון שדה הכוח } \mathbf{F}(x, y) = x^3 y \mathbf{i} + (x - y) \mathbf{j}$$

א. חשבו את העבודה שמבצע השדה על חלקיק שנע על הפרבולה  $y = x^2$

מ- $(-2, 4)$  עד  $(1, 1)$ .

ב. כיצד הייתה משתנה התשובה אילו החלקיק היה נע מ- $(1, 1)$  עד  $(-2, 4)$ ?

$$(19) \text{ חשבו את העבודה שמבצע שדה הכוח } \mathbf{F}(x, y, z) = yz \mathbf{i} + xz \mathbf{j} + xy \mathbf{k}$$

על חלקיק הנע לאורך העיקול  $\mathbf{r}(t) = t \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j} + t^3 \mathbf{k}$  ( $0 \leq t \leq 1$ )

## הערת סימון

אינטגרל קווי מסוג II בסימונים שונים בספרות המקצועית:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C (f, g, h) \cdot (dx, dy, dz) = \int_C f dx + g dy + h dz$$

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_C (A_1, A_2, A_3) \cdot (dx, dy, dz) = \int_C A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz$$

## תשובות סופיות

(1)  $\pi$

(2)  $\frac{16}{3}$

(3)  $\frac{3\sqrt{5}}{2}$

(4)  $\frac{5}{6}(\sqrt{2}+1)$

(5)  $\sqrt{2}\pi(1+\frac{\pi^2}{3})$

(6)  $\frac{567}{2}$

(7) 6

(8)  $\sqrt{5}k\pi^2$

(9)  $\frac{1}{3}$

(10)  $\frac{4}{3}$

(11) א.  $\frac{28}{3}$  ב.  $\frac{32}{3}$

(12) א.  $\frac{34}{3}$  ב. 11 ג. 14 ד.  $\frac{32}{3}$

(13)  $\frac{1}{2}$

(14)  $\frac{4}{5}$

(15) א. 2 ב. -3 ג.  $\frac{6}{5}$

(16)  $-\frac{59}{105}$

(17)  $\frac{6}{5} - \sin 1 - \cos 1$

(18) א. 3 ב. -3

(19) 1

## הצגה פרמטרית של עקומים חשובים

| דוגמה                                                                                                           | הצגה פרמטרית                                                                                            | עקום                                                                        |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|
| $y = x^2 \ (1 \leq x \leq 2)$<br>$\Downarrow$<br>$x = t, y = t^2 \ (1 \leq t \leq 2)$                           | $x = t, y = f(t) \ (a \leq t \leq b)$                                                                   | $y = f(x) \ (a \leq x \leq b)$                                              |
| $x = y^2 \ (1 \leq y \leq 2)$<br>$\Downarrow$<br>$y = t, x = t^2 \ (1 \leq t \leq 2)$                           | $y = t, x = f(t) \ (a \leq t \leq b)$                                                                   | $x = f(y) \ (a \leq y \leq b)$                                              |
| $x^2 + y^2 = 4$<br>$\Downarrow$<br>$x = 2 \cos t, y = 2 \sin t \ (0 \leq t \leq 2\pi)$                          | $x = r \cos t, y = r \sin t \ (0 \leq t \leq 2\pi)$<br>נגד כיוון השעון                                  | $x^2 + y^2 = r^2$<br>מעגל                                                   |
| $x^2 + y^2 = 4$<br>$\Downarrow$<br>$x = 2 \cos t, y = -2 \sin t \ (0 \leq t \leq 2\pi)$                         | $x = r \cos t, y = -r \sin t \ (0 \leq t \leq 2\pi)$<br>עם כיוון השעון                                  | $x^2 + y^2 = r^2$<br>מעגל                                                   |
| $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$<br>$\Downarrow$<br>$x = 3 \cos t, y = 5 \sin t \ (0 \leq t \leq 2\pi)$  | $x = a \cos t, y = b \sin t \ (0 \leq t \leq 2\pi)$<br>נגד כיוון השעון                                  | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$<br>אליפסה                           |
| $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$<br>$\Downarrow$<br>$x = 3 \cos t, y = -5 \sin t \ (0 \leq t \leq 2\pi)$ | $x = a \cos t, y = -b \sin t \ (0 \leq t \leq 2\pi)$<br>עם כיוון השעון                                  | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$<br>אליפסה                           |
| ישר פרמטרי מהנק' $(1, 2)$ לנק' $(3, 4)$<br>$x = 1 + 2t$<br>$y = 2 + 2t$<br>$(0 \leq t \leq 1)$                  | $x = x_0 + t(x_1 - x_0)$<br>$y = y_0 + t(y_1 - y_0)$<br>$(0 \leq t \leq 1)$                             | ישר פרמטרי<br>במישור<br>מהנק' $(x_0, y_0)$<br>לנק' $(x_1, y_1)$             |
| ישר פרמטרי מ- $(1, 2, 3)$ ל- $(4, 7, 9)$<br>$x = 1 + 3t$<br>$y = 2 + 5t$<br>$z = 3 + 6t$<br>$(0 \leq t \leq 1)$ | $x = x_0 + t(x_1 - x_0)$<br>$y = y_0 + t(y_1 - y_0)$<br>$z = z_0 + t(z_1 - z_0)$<br>$(0 \leq t \leq 1)$ | ישר פרמטרי<br>במרחב<br>מהנק'<br>$(x_0, y_0, z_0)$<br>לנק' $(x_1, y_1, z_1)$ |